Лекция 4
Модели аукционов с межинтервальными ограничениями

Ограничения на суммарный объем выработки: Постановка задачи

- Рынок функционирует в течение нескольких последовательных интервалов времени (горизонт планирования)
- Имеется поставщик (например гидрогенератор, накопитель), у которого задано ограничение на суммарный объем выработки за весь горизонт планирования при ограничении максимальной мощности в течении каждого интервала (например, ограничение по совокупному суточному объему воды для гидрогенератора, накопленной э/э для аккумулятора)

Входные данные

Поставщик	Максимальный часовой объем производства (МВтч)	Ценовая заявка (р/МВтч)	Интегральный объем (МВтч)
Г1	50	1	
Г2	30	2	
Г (гидрогенератор)	110	0	100

Объем спроса	Час 1 (МВтч)	Час 2 (МВтч)
	75	120

Матмодель

x_{ti} – об'ем производства генератора $i=1,2$ в час t, $0 \le x_{ti} \le \overline{x_i}$

$x_{tг}$ – об'ем производства гидрогенератора в час t

$0 \le x_{tг} \le \overline{x_г}$, $x_{1г} + x_{2г} \le W$ $[\varphi \ge 0]$

$75 - x_{11} - x_{12} - x_{1г} = 0$ $[\lambda_1]$

$120 - x_{21} - x_{22} - x_{2г} = 0$ $[\lambda_2]$

$$\sum_{i,t} c_i x_{ti} \to \min$$

Условия оптимальности

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ti}} = c_i - \lambda_t + \pi^+_{ti} - \pi^-_{ti} = 0 \;, \; i=1,2 \;, \; t=1,2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t\Gamma}} = -\lambda_t + \varphi + \pi^+_{t\Gamma} - \pi^-_{t\Gamma} = 0 \;, \; t=1,2$$

1. $\pi^+_{t\Gamma} = 0$ т. к. $x_{t\Gamma} \le 100 < \bar{x}_\Gamma = 110$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_t = \varphi - \pi^-_{t\Gamma}$$

2. При $t=2 \Rightarrow x_{2\Gamma} > 0$ (иначе $x_{21} + x_{22} \le \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 80 < d_2 = 120$). $\Rightarrow \pi^-_{2\Gamma} = 0$, $\lambda_2 = \varphi$

Анализ распределения объемов гидрогенератора между часами

Предположим $\pi_{1\Gamma}^{-} > 0 \Rightarrow x_{1\Gamma} = 0 \Rightarrow$

Задача оптимального планирования производства для первого интервала приобретет вид:

$$c_1 x_{11} + c_2 x_{12} \to \min$$

$$0 \le x_{11} \le \overline{x_1}$$

$$0 \le x_{12} \le \overline{x_2}$$

$$75 - x_{11} - x_{12} = 0$$

Оптимальное решение: $x_{11} = 50$, $x_{12} = 25$

"Маржинальный" - генератор 2 $\Rightarrow \lambda_1 = 2$

Определим равновесную цену λ_2 для $t=2$:

Задача для $t=2$

$$c_1 x_{21} + c_2 x_{22} \to \min$$

$$0 \le x_{21} \le \overline{x}_1$$

$$0 \le x_{22} \le \overline{x}_2$$

$$0 \le x_{2Г} \le 100$$

$$120 - x_{21} - x_{22} - x_{2Г} = 0$$

Оптимальное решение: $x_{2Г} = 100$

$$x_{21} = 20$$

$$x_{22} = 0$$

"Маргинальный" генератор - Г1 $\Rightarrow \lambda_2 = 1 < \lambda_1 = 2$

противоречие с $\lambda_2 \geq \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\pi^-_{1Г} = 0}$

Задача поиска равновесных цен

Имеем: $\pi_{1\Gamma} = \pi_{2\Gamma} = 0 \Rightarrow \varphi = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Введем ф-ю Лагранжа $L(x, \lambda_1, \lambda_2, \varphi) = L(x, \lambda)$

Найдем λ из $\max\limits_{\lambda} \min\limits_{x} L(x, \lambda) =$

$$\max_{\lambda} \min_{x}\ c_1(x_{11} + x_{21}) + c_2(x_{12} + x_{22}) +$$

$$\lambda(75 - x_{11} - x_{12} - x_{1\Gamma}) + \lambda(120 - x_{21} - x_{22} - x_{2\Gamma}) +$$

$$\lambda(x_{1\Gamma} + x_{2\Gamma} - 100) =$$

$$= \max_{\lambda} \Big[\min_{0 \le x_{11} \le \bar{x}_1} (c_1 - \lambda) x_{11} + \min_{0 \le x_{12} \le \bar{x}_2} (c_2 - \lambda) x_{12} +$$

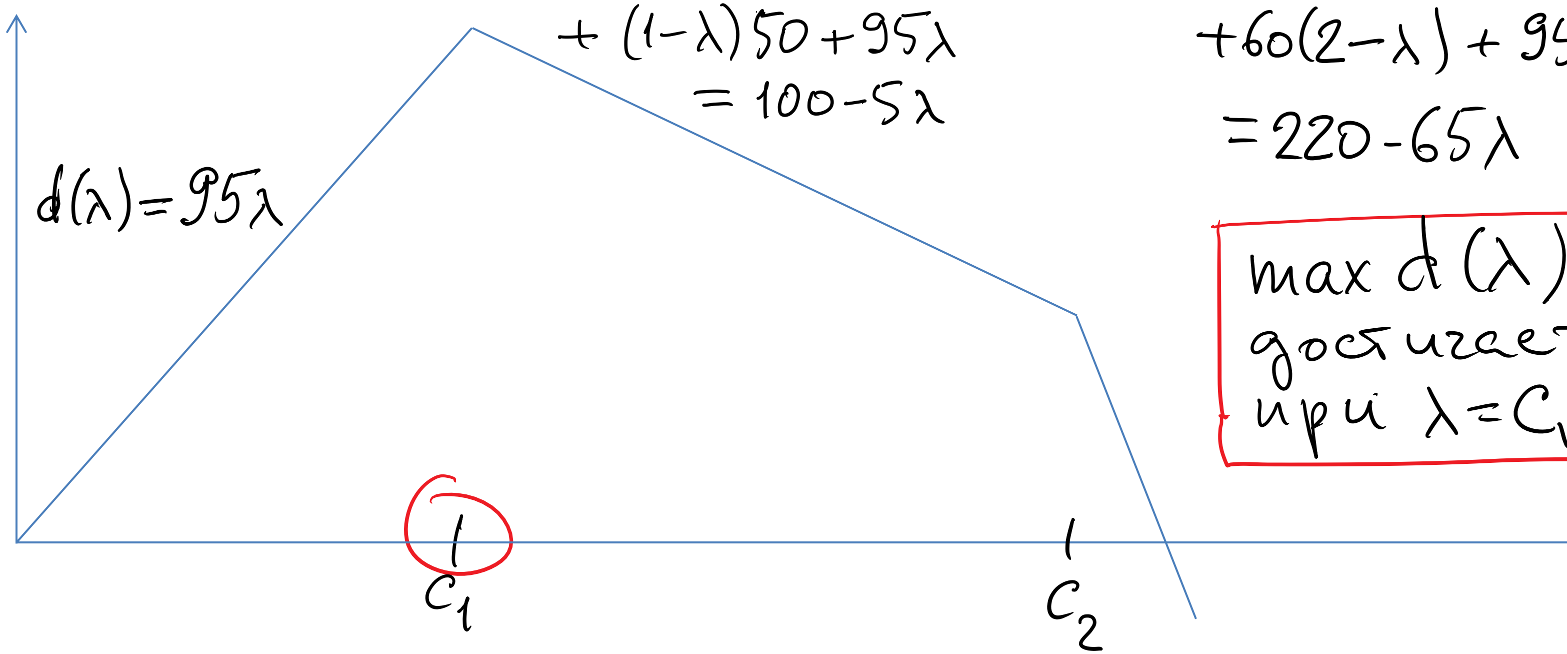
$$+\min_{0\le x_{21}\le \overline{x}_1}(c_1-\lambda)x_{21} + \min_{0\le x_{22}\le \overline{x}_2}(c_2-\lambda)x_{22} +$$

$$+\ 95\lambda$$

$d(\lambda)=(1-\lambda)50$
$+(1-\lambda)50+95\lambda$
$=100-5\lambda$

$d(\lambda)=100(1-\lambda)+$
$+60(2-\lambda)+95\lambda=$
$=220-65\lambda$

$d(\lambda)=95\lambda$



$\boxed{\text{max } d(\lambda) \text{ достигается при } \lambda=c_1=1}$

$x_{ti}=0$
$t=1,2$
$i=1,2$

$x_{t1}=\overline{x}_1$
$x_{t2}=0$
$t=1,2$

$x_{ti}=\overline{x}_i$
$t=1,2$
$i=1,2$

Поиск оптимального решения

$t=1: \quad x_{11}+x_{1r}=75 \quad , x_{t1}\in[0,50]$

$t=2: \quad x_{21}+x_{2r}=120 \quad x_{tr}\in[0,110]$

$$x_{1r}+x_{2r}=100$$

$$c_1(x_{11}+x_{21})\to \min$$

$$\Downarrow$$

$$x_{11}+x_{21}=95$$

Оптимальное решение не единственно:

например, $x_{11}=45,\ x_{1r}=30$
$x_{21}=50,\ x_{2r}=70$

Распределение нагрузки по часам при наличии интегральных ограничений

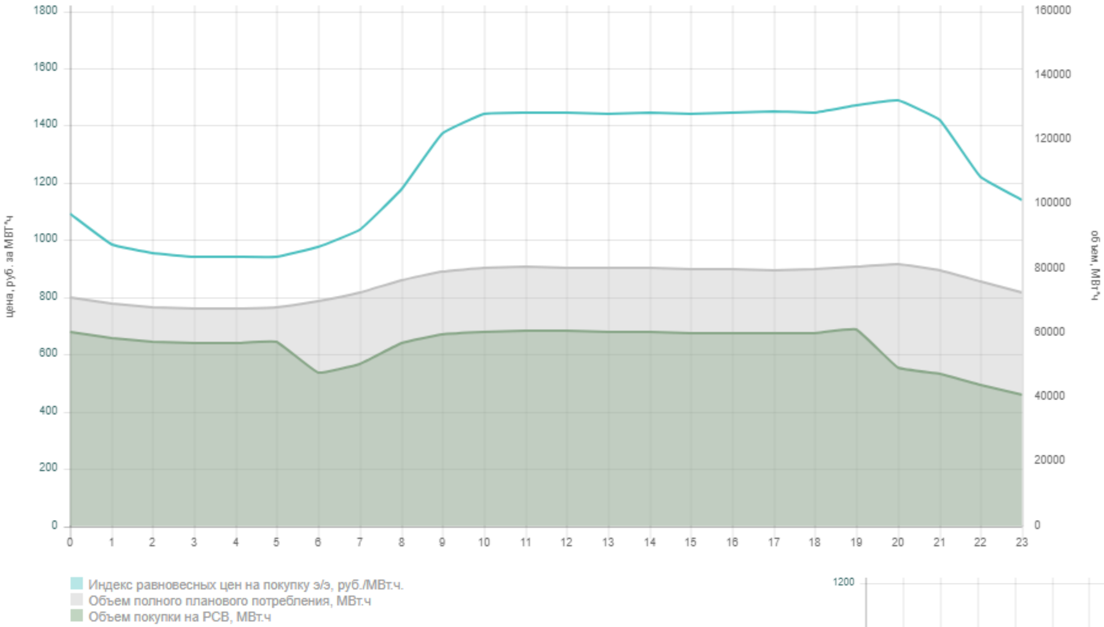
Утв. 1) Если ценовая заявка генератора с интегральным ограничением не меняется от часа к часу, равновесные цены в узле такого генератора одинаковы в те часы, в которые оптимальная нагрузка генератора находится строго внутри регулировочного диапазона. 2) В прочие часы равновесные цены выше, если оптимальная нагрузка находится на верхнем пределе регулировочного диапазона и 3) равновесные цены ниже, если оптимальная нагрузка находится на нижнем пределе регулировочного диапазона

$$c_t - \lambda_t + \varphi + \pi_t^+ - \pi_t^- = 0$$

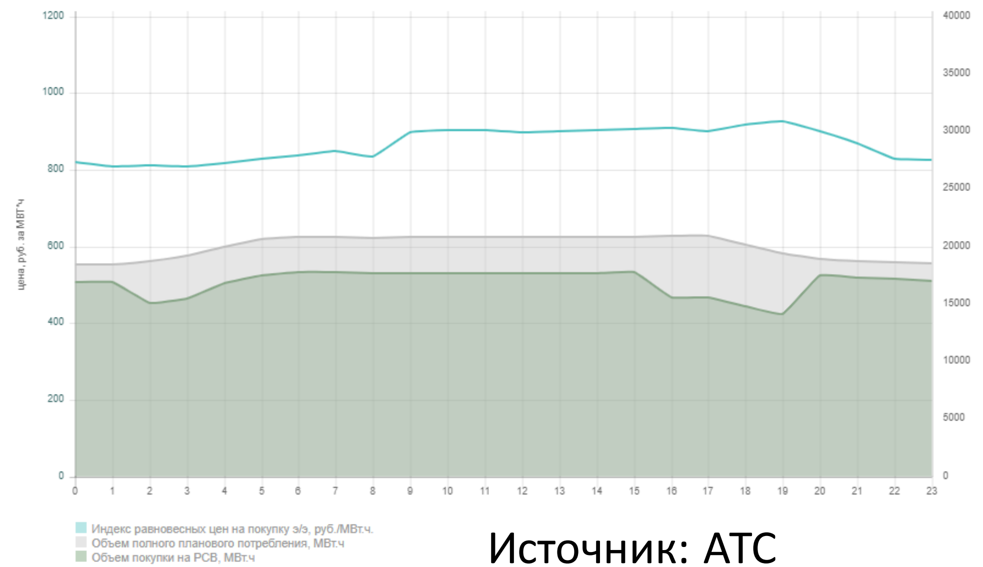
Выводы

- Использование интегральных ограничений приводит к более сглаженному профилю цен в течение горизонта планирования (если бы объемы гидрогенератора распределить 50+50 на 1й и 2й часы, цена во втором часу возросла бы до 2) и к более низкой совокупной себестоимости производства.

Рынок на сутки вперед (РСВ)



1 ЦЗ



2 ЦЗ

Источник: АТС

Ограничения на скорость набора/сброса нагрузки

- В силу технологических особенностей скорость изменения нагрузки генератора между интервалами горизонта планирования конечна и определяется заданными ограничениями: максимальной скоростью набора мощности (МВт/мин), максимальной скоростью сброса мощности (МВт/мин)

Входные данные

Поставщик	Максимальный часовой объем производства (МВтч)	Ценовая заявка (р/МВтч)	Скорость набора/сброса нагрузки(МВт/час)
Г1	50	0	10
Г2	50	1	10
Г3	30	2	

Объем спроса	Час 1 (МВтч)	Час 2 (МВтч)
	70	100

Матмодель

$$70 - x_{11} - x_{12} - x_{13} = 0 \quad [\lambda_1]$$

$$120 - x_{21} - x_{22} - x_{23} = 0 \quad [\lambda_2]$$

$$x_{2i} \le x_{1i} + 10 \quad [\rho_i^+ \ge 0]$$

$$x_{2i} \ge x_{1i} - 10 \quad [\rho_i^- \ge 0], \; i = 1, 2$$

$$0 \le x_i \le \overline{x}_i \; , \; i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{t,i} c_i x_{ti} \to \min_x$$

Решение

$x_{11} = 50$ $x_{21} = 50$

$x_{12} = 20$ $x_{22} = 30$

$x_{13} = 0$ $x_{23} = 20$

Расчет равновесных цен и проверка оптимальности построенного решения

Воспользуемся условиями ККТ:

1) $\rho_i^- = 0,\ i = 1,2$, $\pi_{11}^- = 0$, $\pi_{12}^{+/-} = 0$, $\pi_{13}^+ = 0$

$\pi_{21}^- = 0$, $\pi_{22}^{+/-} = 0$, $\pi_{23}^{+/-} = 0$

2) $$\frac{\partial L}{\partial x_{23}} = c_3 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = c_3 = 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{22}} = c_2 - \lambda_2 + \rho_2^+ = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_2^+ = \lambda_2 - c_2 = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = c_2 - \lambda_1 - \rho_2^+ = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = c_2 - \rho_2^+ \quad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = c_1 - \lambda_1 - \underset{(\overset{\|}{0})}{\rho_1^+} + \pi_{11}^+ = c_1 - \lambda_1 + \pi_{11}^+ = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_{11}^+ = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{21}} = c_1 - \lambda_2 + \pi_{21}^+ = 0 \Rightarrow \pi_{21}^+ = \lambda_2 = 2$$

Построено решение $(x^*, \lambda^*, \rho^*, \pi^*)$, удовлетворяющее усл. ККТ

Сводный результат

	Генератор	Г1	Г2	Г3
Час 1	Оптимальная нагрузка	50	20	0
Час 2		50	30	20
Час 1	Цена	0	0	0
Час 2		2	2	2
Час 1	Прибыль	0	-1	-2
Час 2		2	1	0

Противоречие с индивидуальной рациональностью стратегии генератора Г2???

Интегральный финансовый результат генератора Г2 за 1 и 2 часы оказывается положителен: -1*20 + 1*30 = 10 > 0

Альтернативное решение

$x_{11} = 50 \qquad x_{21} = 50$

$x_{12} = 10 \qquad x_{22} = 20$

$x_{13} = 10 \qquad x_{23} = 30 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Г2 имеет прибыль при $t = 1, 2$

При этом ЦФ $= c_2(x_{12} + x_{22}) + c_3(x_{13} + x_{23}) =$

$= 1 \cdot (10 + 20) + 2 \cdot (10 + 30) = 110 > 1 \cdot (20 + 30) +$

$+ 2(10 + 20) = 90$ (в предыдущем решении)

KKT:

$$c_2 - \lambda_1 - \overset{\overset{0}{\wedge|}}{\rho_2^+} + \overset{\overset{0}{||}}{\pi_{12}^+} - \overset{\overset{0}{||}}{\pi_{12}^-} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = \lambda_1 + \rho_2^+ \Rightarrow c_2 \geq \lambda_1 = 2 \text{ противоречие}$$

$$c_3 - \lambda_1 + \underset{\underset{0}{||}}{\pi_{13}^+} - \underset{\underset{0}{||}}{\pi_{13}^-} = 0 \Rightarrow c_3 = \lambda_1 = 2$$

$$\min\ c_2 x_{12} + c_2 x_{22} - \lambda_1 x_{12} - \lambda_2 x_{22}$$

$$x_{22} \le x_{12} + 10$$

$$x_{12}, x_{22} \in [0, \overline{x}_2]$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ оптимальное решение

$$x_{12}^* = 20,\ x_{22}^* = 30$$